9 Ecuaciones diferenciales ordinarias. Ecuaciones diferenciales de primer orden en forma normal

9.1 Definición

Se llama **ecuación diferencial ordinaria** a cualquier expresión de la forma

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

que liga a una variable independiente x con una función de ella $y = y(x)$ (variable dependiente) y sus n, $n \geq 1$, primeras derivadas.

El término "ordinariaÝÝ de la definición hace referencia al hecho de que la función que aparece depende de una única variable y no aparecen derivadas parciales.

Si en la expresión aparece despejada la derivada de orden máximo:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

se dice que la ecuación diferencial está en **forma normal o explícita**. En caso contrario se dice que está en **forma general o implícita**.

Se llama **orden** de la ecuación diferencial al orden mayor de derivada que aparece en la ecuación.

9.2 Definición

Se llama **solución** de la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

a cualquier función $y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, que tenga derivadas continuas hasta el orden n en I, y que verifique la ecuación:

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$$

para todo $x \in I$.

Las soluciones pueden darse en forma explícita, como se indica en la definición, pero también pueden venir dadas en forma implícita o paramétrica.

Resolver una ecuación diferencial es hallar todas sus soluciones.

9.3 El origen de las ecuaciones diferenciales

Existen muchos y variados campos de las Ciencias donde aparecen, y tuvieron su origen, las Ecuaciones Diferenciales. Por ejemplo:

1. **Ley de enfriamiento de Newton**: La velocidad con que cambia la temperatura $T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura $T(t)$ del cuerpo y la temperatura A del medio ambiente. Es decir

$$\frac{dT(t)}{dt} = k\left(A - T(t)\right)$$

Luego esta ley nos lleva a una ecuación diferencial $T' = k(A - T)$ donde t es la variable independiente y T la dependiente.

2. **Dinámica de poblaciones de Malthus**: La velocidad de cambio, con respecto al tiempo t, de una población $P(t)$ con índices constantes de nacimientos y mortalidad es proporcional al tamaño de la población. Es decir

$$P'(t) = k \cdot P(t)$$

que es una ecuación diferencial.

3. **Problemas geométricos** que impliquen condiciones de pendiente o concavidad.

9.4 Ecuaciones de la forma $y' = f(x)$

Se resuelven mediante integración directa. La solución es

$$y = \int f(x)\,dx = \varphi(x) + c \quad , \qquad c \in \mathbb{R}$$

donde φ es una primitiva de f ($\varphi' = f$).

9.5 Ecuaciones de la forma $y^{(n)} = f(x)$

Se resuelven mediante n integraciones sucesivas:

$$\begin{aligned}
y^{(n-1)} &= \int f(x)\,dx = \varphi_1(x) + c_1 \\
y^{(n-2)} &= \int (\varphi_1(x) + c_1)\;dx = \varphi_2(x) + c_1 x + c_2 \\
y^{(n-3)} &= \int (\varphi_2(x) + c_1 x + c_2)\;dx = \varphi_3(x) + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \\
&\dots \\
&\dots \\
y &= \varphi_n(x) + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \ldots + k_{n-1} x + k_n
\end{aligned}$$

con $k_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$.

9.6 Ecuaciones de variables separables

Son aquellas ecuaciones de la forma

$$y' = f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

que se pueden transformar, haciendo $y' = \frac{dy}{dx}$, en

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

e integrando cada miembro respecto de la variable que allí aparece se obtienen las soluciones

$$\varphi(y) = \psi(x) + c \quad , \qquad c \in \mathbb{R}$$

siendo $\varphi(y)$ primitiva de $h(y)$ ($\varphi' = h$) y $\psi(x)$ primitiva de $g(x)$ ($\psi' = g$).

9.7 Ecuaciones autónomas

Son ecuaciones de la forma

$$y' = f(y)$$

que son de variables separables y se resuelven como tales.

9.8 Ecuaciones homogéneas

Son ecuaciones de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

y se resuelven mediante el cambio de variable dependiente $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ (es decir $y = ux$). Haciendo el cambio nos queda

$$u'x + u = f(u)$$

de donde se obtiene

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

que es una ecuación de variables separables, que se resuelve como tal y se deshace el cambio.

9.9 Ecuaciones reducibles a homogéneas

Son ecuaciones del tipo

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$$

Para su resolución se distinguen tres casos:

1. $\boldsymbol{c = C = 0}$. En este caso la ecuación dada ya es homogénea, pues

   $$y' = f\left(\frac{ax + by}{Ax + By}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{A + B\frac{y}{x}}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

   y se resuelve como tal.

2. $\boldsymbol{c \neq 0}$ **o** $\boldsymbol{C \neq 0}$ **y** $\boldsymbol{aB - bA \neq 0}$. Se transforma en una ecuación homogénea mediante el doble cambio de variables, (x, y) por (X, Y), dado por

   $$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

   donde (α, β) es el punto de corte de las rectas

   $$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

   Haciendo el cambio queda:

   $$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{a(X + \alpha) + b(Y + \beta) + c}{A(X + \alpha) + B(Y + \beta) + C}\right) = f\left(\frac{aX + bY}{AX + BY}\right)$$
   $$= f\left(\frac{a + b\frac{Y}{X}}{A + B\frac{Y}{X}}\right) = F\left(\frac{Y}{X}\right)$$

   que es una ecuación homogénea. Se resuelve y se deshace el cambio.

3. $\boldsymbol{c \neq 0}$ **o** $\boldsymbol{C \neq 0}$ **y** $\boldsymbol{aB - bA = 0}$. En este caso $(A, B) = k(a, b)$, y haciendo el cambio de variable dependiente $u = ax + by$ se llega a

$$u' = a + by' = a + bf\left(\frac{u + c}{ku + C}\right)$$

que es una ecuación de variables separables. Se resuelve como tal y se deshace el cambio.

9.10 Interpretación geométrica de $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$

La ecuación diferencial nos indica, en cada punto (x_0, y_0), la pendiente que debe tener la solución: $y_0' = f(x_0, y_0)$.

Se llama **campo de direcciones** de la ecuación diferencial a una representación del plano con indicación, en cada uno de sus puntos (en un entramado suficientemente amplio de ellos), de la pendiente que debe tener la solución. El campo de direcciones nos proporciona una solución gráfica aproximada de las posibles soluciones de la ecuación diferencial.

9.11 Problema de Cauchy

Una ecuación diferencial tiene, en general, infinitas soluciones. Se llama **problema de Cauchy** al conjunto formado por una ecuación diferencial y ciertas condiciones que hagan (o que pretendan conseguir) que la solución sea única. El más típico problema de Cauchy de orden 1 es

$$\left\{\begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

donde $y(x_0) = y_0$ indica que la solución buscada debe pasar por el punto (x_0, y_0), y de orden n es

$$\left\{\begin{array}{l} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \cdots \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array}\right.$$

9.12 Teorema de existencia y unicidad

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para cada punto $(x_0, y_0) \in D$, el problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

admite al menos una solución $y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$ con $x_0 \in I$. Si además $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en D, entonces la solución al problema de Cauchy es única.

9.13 Método iterativo de Picard

Es un método iterativo, que se deriva del teorema anterior, que permite determinar la única solución $y = \varphi(x)$ de un problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

como límite

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

de la sucesión $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida inductivamente por

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = y_0 \\ &\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \varphi_{n-1}(t)\right) dt \quad , \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

9.14 Familias de curvas y ecuaciones diferenciales

En general, a cada ecuación diferencial de orden n

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

se le puede hacer corresponder una familia n-paramétrica de curvas

$$\varphi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n\right) = 0$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, que son sus soluciones. Asímismo, a cada familia n-paramétrica de curvas se le puede asociar una ecuación diferencial de orden n que se obtiene derivando n veces (hasta el orden n) la ecuación de la familia de curvas y eliminando después los n parámetros entre las $n+1$ ecuaciones obtenidas.

9.15 Trayectorias ortogonales. $\boldsymbol{\theta}$-trayectorias

Dada una familia uniparamétrica de curvas $\varphi(x, y, c) = 0$, $c \in \mathbb{R}$, se llaman **$\boldsymbol{\theta}$-trayectorias** a la familia $\psi_\theta(x, y, c) = 0$, $c \in \mathbb{R}$, de curvas que verifica que el ángulo de corte de cada curva de φ con cada curva de ψ_θ es θ. En el caso de $\theta = \pi/2$ las **trayectorias** se llaman **ortogonales**.

Si $F(x, y, y') = 0$ es la ecuación diferencial asociada a la familia $\varphi(x, y, c) = 0$, entonces la familia de θ-trayectorias $\psi_\theta(x, y, c) = 0$ son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} F\left(x, y, \frac{y' - \tan\theta}{1 + y' \tan\theta}\right) = 0 & , \text{ si } \theta \neq \frac{\pi}{2} \\ F\left(x, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0 & , \text{ si } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

9.16 Ecuación lineal homogénea

Es la ecuación de la forma

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

que es una ecuación de variables separables, se resuelve como tal y su solución general es

$$y = k \cdot \varphi(x) \quad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

con $\varphi(x)$ una solución particular arbitraria no nula.

9.17 Ecuación lineal completa

Es la ecuación de la forma

$$a(x)y' + b(x)y = p(x)$$

Método de resolución:

1. Resolver la ecuación homogénea asociada

   $$a(x)y' + b(x)y = 0$$

   cuya solución es $y = k\varphi(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

2. Aplicar el **método de variación de las constantes** imponiendo que la solución de la ecuación completa es de la forma $y = k(x)\varphi(x)$, con lo que se llega sustituyendo a

   $$a(x)\left[k'(x)\varphi(x) + k(x)\varphi'(x)\right] + b(x)k(x)\varphi(x) = p(x)$$

   de donde se llega a que

   $$k'(x) = \frac{p(x)}{a(x)\varphi(x)}$$

   y por tanto

   $$k(x) = \int \frac{p(x)}{a(x)\varphi(x)}\, dx = \psi(x) + k \quad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

3. La solución de la ecuación lineal completa es

   $$y = (\psi(x) + k)\,\varphi(x) = \psi(x)\varphi(x) + k\varphi(x) \quad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

9.18 Ecuación de Bernouilli

Es la ecuación de la forma

$$a(x)y' + b(x)y = p(x)y^n$$

con $p(x) \not\equiv 0$, $n \neq 0$ y $n \neq 1$. Se resuelve mediante el cambio de variable dependiente

$$z = y^{1-n}$$

que la transforma en una ecuación lineal. Si $n > 0$, no olvidar añadir la solución $y = 0$ que se pierde en la resolución de la ecuación.

9.19 Ecuación de Riccati

Es la ecuación de la forma

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = p(x)$$

con $c(x) \not\equiv 0$ y $p(x) \not\equiv 0$. Para resolverla es necesario conocer previamente una solución particular no nula $y = \varphi(x)$. A partir de ella hay dos posibilidades de resolución:

1. Hacer el cambio de variable dependiente

   $$y = \varphi(x) + z$$

   que la transforma en una ecuación de Bernouilli de orden $n = 2$.

2. Hacer el cambio de variable dependiente

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{u}$$

que la transforma en una ecuación lineal.

No olvidar añadir la solución $y = \varphi(x)$ que se pierde en la resolución de la ecuación.

9.20 Definición

Toda ecuación diferencial de orden 1 en forma normal, $y' = f(x, y)$, se puede transformar (sustituyendo y' por dy/dx) en $dy = f(x, y)\, dx$, que operando y simplificando nos llevará a una ecuación del tipo

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

que se llama **forma diferencial** de la ecuación.

9.21 Ecuaciones diferenciales exactas

Una **ecuación diferencial**

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

se llama **exacta** si existe una función $U : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio (abierto y conexo), continua y con derivadas parciales continuas en D, tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$$

La solución de la ecuación diferencial exacta viene dada por

$$U(x, y) = k \quad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

9.22 Observaciones

Recordando la sección 4, la ecuación $P\, dx + Q\, dy = 0$ es exacta si y sólo si la función vectorial $F = (P, Q)$ admite función potencial, lo que es equivalente, en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo, a que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{en} \qquad D$$

La función potencial es la función U del apartado anterior.

9.23 Factor integrante

Dada una ecuación diferencial no exacta $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$, llamaremos **factor integrante** a cualquier función $\mu = \mu(x, y)$ no nula tal que la ecuación

$$P(x, y)\mu(x, y)\, dx + Q(x, y)\mu(x, y)\, dy = 0$$

sea diferencial exacta.

Cualquier ecuación diferencial de orden 1 en forma normal se podría resolver siempre que se sepa obtener un factor integrante ya que, en este caso, se multiplicaría la ecuación por él y se resolvería. La condición para que $\mu = \mu(x, y)$ sea factor integrante es que

$$\frac{\partial(P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(Q\mu)}{\partial x}$$

en un dominio simplemente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$, que se puede transformar en

$$\frac{\partial P}{\partial y}\,\mu + P\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mu + Q\,\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

que es una ecuación diferencial en derivadas parciales (la incógnita es la función μ) mucho más difícil de resolver, en general, que la ecuación original. Sin embargo puede resolverse, de forma más sencilla, bajo ciertas hipótesis adicionales como que

$$\mu = \mu(x)\ ;\ \ \mu = \mu(y)\ ;\ \ \mu = \mu(x+y)\ ;\ \ \mu = \mu(x^n y^m)\ ;\ldots$$